



УДК: 531.38

MSC 2010: 70E18, 37J60, 37J35

Динамика неголономных систем, состоящих из сферической оболочки с подвижным твердым телом внутри

И. А. Бизяев, А. В. Борисов, И. С. Мамаев

Получено 4 сентября 2013 года

После доработки 31 октября 2013 года

Работа выполнена при поддержке АВИЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» на 2012–2014 годы, № 1.1248.2011 «Неголономные динамические системы и проблемы управления», № 1.7734.2013 «Разработка неголономных мобильных систем», ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», соглашение № 14.В37.21.1935 «Топологические методы в механике и гидродинамике». Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1. Работа И. А. Бизяева поддержана грантом Президента РФ поддержки молодых докторов наук МД-2324.2013.1, грантом фонда Д. Зими́на «Династия», грантом РФФИ 13-01-12462-офи_м «Теория гамильтоновых систем и ее приложения в классической механике и гидродинамике».

Бизяев Иван Алексеевич

bizaev_90@mail.ru

Институт компьютерных исследований;

лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Борисов Алексей Владимирович

borisov@rcd.ru

Мамаев Иван Сергеевич

mmaev@rcd.ru

Институт компьютерных исследований;

лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН

117334, Россия, г. Москва, ул. Бардина, д. 4

Институт математики и механики УрО РАН

620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16

В работе исследованы две системы, состоящие из сферической оболочки, катящейся по плоскости без проскальзывания, и подвижного твердого тела, закрепленного внутри оболочки при помощи двух различных механизмов. В первом случае твердое тело закреплено в центре шара на сферическом шарнире. Указан изоморфизм уравнений движения внутреннего тела с движением шара по гладкой плоскости. Во втором случае твердое тело закреплено с помощью неголономного шарнира. Получены уравнения движения для этой системы и указаны новые интегрируемые случаи. Особенность набора тензорных инвариантов данной системы заключается в том, что он приводит к новому в неголономной механике механизму интегрирования — теореме Эйлера–Якоби–Ли.

Кроме того, рассмотрена задача о свободном движении связки двух тел, соединенных неголономным шарниром. Для этой системы найдены интегрируемые случаи, а также различные тензорные инварианты.

Ключевые слова: неголономная связь, тензорные инварианты, изоморфизм, неголономный шарнир

Введение

Данная работа продолжает цикл исследований авторов по динамике неголономных систем [2, 7, 11–14, 24, 25]. Прикладное значение таких систем обусловлено их использованием в теории управления и робототехнике для моделирования динамики устройств, связанных с качением. Так, одной из популярных задач робототехники является исследование проблем динамического управления передвижением сферического робота, использующего различные приводящие механизмы (маятниковые, роторные и т. п.; см. подробнее библиографию в [5]). В частности, в работах [5, 6, 32] изучено управление динамически несимметричным шаром при помощи трех уравновешенных роторов, указаны преимущества и недостатки такого механизма управления.

Как было показано в работах [11, 14, 24, 25], по сравнению с гамильтоновыми системами неголономные обладают существенно более разнообразным поведением. Такое многообразие типов поведения (которое было названо иерархией динамического поведения) обусловлено наличием или отсутствием различных тензорных инвариантов (законов сохранения), что существенным образом влияет на динамику системы. Заметим, что для гамильтоновых систем, вследствие существования такого тензорного инварианта, как скобка Пуассона, различных типов поведения не наблюдается — их динамика всегда консервативна. Поэтому прежде чем изучать управляемую динамику новых неголономных систем, необходимо хорошо представлять себе их свободную динамику, этому и посвященная настоящая работа.

В работе исследуются две системы, которые имеют непосредственное отношение к робототехнике и связаны с различными конструкциями механизма управления качением шара по плоскости. При этом используется классическая модель абсолютно шероховатой плоскости, в которой скорость точки контакта шара с плоскостью равна нулю (обсуждение вопросов при дополнительном динамическом ограничении непрокручивания имеется в [14, 15]).

В первой системе в центре шара на сферическом шарнире закреплено твердое тело, причем центр масс всей системы в общем случае не лежит в геометрическом центре шара. В частном случае, когда внутри оболочки закреплен сферический маятник, эта задача была проинтегрирована С. А. Чаплыгиным [23]. Случай, когда внутреннее тело динамически симметрично, рассмотрен в работах [3, 12, 19]. Лагранжево представление уравнений движения внутреннего тела (из которого следует их гамильтоновость) в этом случае указано

С. В. Болотиным [3]. Здесь мы развиваем эти идеи, и в общем случае произвольного тела записываем уравнения движения при помощи избыточных координат и квазискоростей. Это позволяет представить систему в удобной для анализа алгебраической форме и установить изоморфизм с аналогичной системой на абсолютно гладкой плоскости, что, в свою очередь, дает возможность представить уравнения движения в гамильтоновой форме и найти новые интегрируемые случаи.

Во второй задаче внутри шара также находится твердое тело, причем между шаром и внутренним телом есть неголономная связь, запрещающая их относительные повороты вдоль одного выбранного направления, фиксированного во внутреннем теле. Реализация такой связи при помощи острых колес, на которых закреплено внутреннее тело, была предложена В. Вагнером [9], кинематический механизм, реализующий указанную связь между двумя твердыми телами, был назван в работе [22] неголономным шарниром. Схема шарового робота, использующего для передвижения неголономный шарнир между внутренним телом и сферической оболочкой, была предложена в [28] (без теоретического анализа). Особенность набора тензорных инвариантов данной системы заключается в том, что он приводит к новому в неголономной механике механизму интегрирования — теореме Эйлера–Якоби–Ли [17, 18], по которой для интегрируемости n -мерной системы требуется наличие инвариантной меры, $n - 2 - k$ первых интегралов и k полей симметрий.

В заключение работы рассматривается задача о свободном движении связки двух тел, соединенных неголономным шарниром (близкая задача обсуждалась еще Г. К. Суловым [20]). Ее интересной особенностью является то, что она может рассматриваться как интегрируемый (по теореме Эйлера–Якоби) геодезический поток квадратичной метрики на разрешимой группе Ли.

Отметим также, что при анализе систем, рассматриваемых в данной работе, возникло множество новых задач из разных областей теории динамических систем: явного интегрирования, топологического анализа, исследования устойчивости, и т. д.

1. Однородная сферическая оболочка с твердым телом, закрепленным в геометрическом центре

1. Уравнения движения. Интеграл Чаплыгина. Рассмотрим движущуюся по горизонтальной плоскости систему, состоящую из двух тел. Одно из них — несущее, представляет собой *сферическую оболочку*, такую, что ее тензор инерции — шаровой $I_s \mathbf{E}$ (\mathbf{E} — единичная матрица) и наружная поверхность — правильная сфера; внутри этого тела имеется полость, в центре которой закреплено несомое тело — *волчок*, причем точка закрепления совпадает с геометрическим центром наружной поверхности сферической оболочки (см. рис. 1). Полагаем также, что несущее тело катится по плоскости без проскальзывания. Приведем подробный вывод уравнений движения, используя квазикоординаты, в которых уравнения движения примут более удобную (по сравнению с [3]) для дальнейшего исследования алгебраическую форму.

Положение и конфигурация данной системы полностью определяется радиус-вектором $\mathbf{R}_p \in \mathbb{R}^2$ точки контакта P оболочки, матрицей поворота оболочки $\mathbf{Q}_s \in SO(3)$ и матрицей поворота волчка $\mathbf{Q}_t \in SO(3)$.

Для того чтобы получить уравнения движения в наиболее простой форме, воспользуемся тем, что они должны быть инвариантны относительно группы движений плоскости $E(2)$ и (вследствие динамической симметрии оболочки) относительно группы поворотов несущего

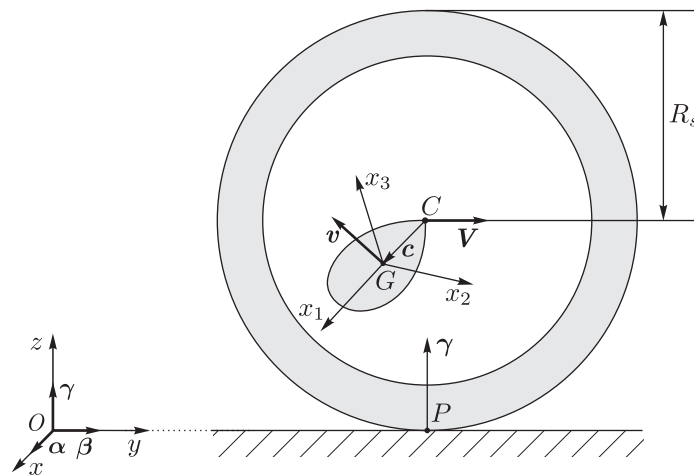


Рис. 1. Динамически симметричная сферическая оболочка, в центре которой закреплен волчок.

го тела $SO(3)$. В данном случае величинами, инвариантными относительно действия группы симметрий $E(2) \times SO(3)$, являются проекции скоростей, угловых скоростей тел и вектора нормали к плоскости на подвижные оси, жестко связанные с несомым телом — волчком. Поэтому выберем систему координат $Gx_1x_2x_3$, жестко связанную с волчком, центр которой совпадает с его центром масс.

Пусть V, Ω — скорость центра и угловая скорость оболочки, v, ω — соответствующие скорости волчка, γ — нормаль к плоскости, c — постоянный вектор из центра оболочки C в центр масс волчка G . Условие закрепления несущего тела в несомом эквивалентно совпадению в точке C скорости оболочки и волчка и выражается (голономной) связью вида

$$v = V + \omega \times c. \quad (1.1)$$

Отсутствие проскальзывания в точке P соответствует обращению в нуль скорости точки контакта оболочки, что задается (неголономной) связью

$$V - R_s \Omega \times \gamma = 0, \quad (1.2)$$

где R_s — внешний радиус оболочки (см. рис. 1).

Уравнения, описывающие эволюцию импульсов и угловых моментов данных тел, в подвижных осях представляются в виде

$$\begin{aligned} m_s \dot{V} + \omega \times m_s V &= N_c + N_p, & I_s \dot{\Omega} + \omega \times I_s \Omega &= R_s N_p \times \gamma, \\ m_t \dot{v} + \omega \times m_t v &= -m_t g \gamma - N_c, & I_t \dot{\omega} + \omega \times I_t \omega &= -N_c \times c, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где m_s, m_t — масса оболочки и волчка соответственно, I_t — тензор инерции волчка, N_c, N_p — силы реакции связей (1.1), (1.2). Эти уравнения необходимо дополнить уравнением Пуассона, описывающим эволюцию неподвижного в пространстве вектора нормали в подвижной системе координат:

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \quad (1.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и далее для упрощения, где это необходимо, мы полагаем $\gamma^2 = 1$.

Из уравнений (1.3), (1.4) следует, что вертикальная составляющая угловой скорости оболочки сохраняется:

$$\Omega_z = (\Omega, \gamma) = \text{const.}$$

Пользуясь этим интегралом, можно выразить угловую скорость несущего тела через скорость его центра \mathbf{V} и вектор $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = R_0^{-1} \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{V} + \Omega_z \boldsymbol{\gamma}. \quad (1.5)$$

Выразим теперь при помощи связей (1.1), (1.2) моменты сил реакций в уравнениях (1.3):

$$\begin{aligned} R_s \mathbf{N}_p \times \boldsymbol{\gamma} &= (m_s + m_t) R_s (\dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) \times \boldsymbol{\gamma} + m_t R_s (\dot{\mathbf{v}}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c) \times \boldsymbol{\gamma}, \\ -\mathbf{N}_c \times \mathbf{c} &= m_t (\dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) \times \mathbf{c} + m_t (\dot{\mathbf{v}}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c) \times \mathbf{c} + m_t g \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{c}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где введено обозначение $\mathbf{v}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}$.

Пользуясь соотношением (1.5) из уравнения для эволюции $\boldsymbol{\Omega}$ и первого из соотношений (1.6), получим:

$$I_s (\dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) = -\boldsymbol{\gamma} \times \left(\left((m_s + m_t) R_s^2 (\dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) + m_t R_s^2 (\dot{\mathbf{v}}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c) \right) \times \boldsymbol{\gamma} \right). \quad (1.7)$$

Определим для сокращения записи проекционный оператор Π_a :

$$\Pi_a \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a}^2 \mathbf{b} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{a}.$$

Можно показать, что вследствие уравнения связи (1.2) справедливо тождество

$$\Pi_{\boldsymbol{\gamma}} (\dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) = \dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}.$$

Это позволяет переписать уравнение (1.7) в форме

$$\dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = -\kappa \Pi_{\boldsymbol{\gamma}} (\dot{\mathbf{v}}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c), \quad \kappa = \frac{m_t R_s^2}{I_0 + (m_s + m_t) R_s^2}. \quad (1.8)$$

Поскольку нормаль к плоскости $\boldsymbol{\gamma}$ неподвижна в пространстве, из соотношения (1.8) следует, что параллельный плоскости вектор

$$\mathbf{K} = \mathbf{V} + \kappa \Pi_{\boldsymbol{\gamma}} \mathbf{v}_c, \quad (\mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad (1.9)$$

также неподвижен в пространстве, то есть его эволюция в подвижных осях $Gx_1x_2x_3$ задается уравнением

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Вектор \mathbf{K} , выраженный в неподвижных осях, совпадает с векторным интегралом, указанным С. А. Чаплыгин для подобных систем [23].

Пользуясь теперь вторым уравнением в (1.6) и уравнением (1.8), представим эволюцию вектора $\boldsymbol{\omega}$ в виде

$$\mathbf{I}_t \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_t \boldsymbol{\omega} = m_t \left(\mathbf{E} - \kappa \Pi_{\boldsymbol{\gamma}} (\dot{\mathbf{v}}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c) \right) \times \mathbf{c} + m_t g \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{c}. \quad (1.10)$$

Данное уравнение, совместно с уравнением Пуассона (1.4), образует замкнутую относительно векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ систему. Перепишем ее в более удобной для дальнейшего анализа форме, для этого воспользуемся тождеством

$$(\dot{\mathbf{v}}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c) \times \mathbf{c} = -(\Pi_c \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \Pi_c \boldsymbol{\omega})$$

и перенесем часть слагаемых в (1.10) из правой части в левую. Окончательно получим следующий результат.

Предложение. Уравнения движения, описывающие эволюцию векторов ω , γ , образуют замкнутую (редуцированную) систему и могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{J}\omega &= \kappa m_t(\dot{v}_c + \omega \times v_c, \gamma)\gamma \times c + m_t g \gamma \times c, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{I}_t + (1 - \kappa)m_t \mathbf{\Pi}_c = \mathbf{I}_t + (1 - \kappa)m_t c^2 \mathbf{E} - (1 - \kappa)m_t c \otimes c. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Эта система уравнений обладает геометрическим интегралом, интегралом площадей и интегралом энергии:

$$F_0 = (\gamma, \gamma) = 1, \quad F_1 = (\mathbf{J}\omega, \gamma) = \text{const}, \quad E = \frac{1}{2}(\omega, \mathbf{J}\omega) + \frac{1}{2}\kappa m_t(v_c, \gamma)^2 + m_t(c, \gamma).$$

Для полного описания динамики данной системы выберем оси неподвижной системы координат $Oxyz$ таким образом, что $Ox \parallel K$, и обозначим через α , β орты неподвижных осей, выраженные в подвижной системе координат; тогда

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad K = |K|\alpha. \quad (1.12)$$

Орты α , β , γ полностью определяют поворот волчка. При помощи (1.9) скорость точки контакта в неподвижной системе координат находим в виде

$$\dot{x} = (V, \alpha) = |K| - \kappa(v_c, \alpha), \quad \dot{y} = (V, \gamma \times \alpha) = \kappa(v_c, \alpha \times \gamma).$$

По известным величинам ω , α , γ угловая скорость оболочки Ω находится из соотношения (1.5), после чего поворот оболочки также находится посредством уравнений Пуассона.

2. Шар со смещенным центром на гладкой плоскости. Рассмотрим теперь заведомо гамильтонову (консервативную) систему, описывающую скольжение динамически несимметричного шара со смещенным центром по абсолютно гладкой плоскости.

Эта система в абсолютном движении имеет пять степеней свободы, но в силу того, что реакция плоскости при идеальном скольжении ей перпендикулярна, сохраняются две проекции импульса системы на эту плоскость. Выбирая систему координат $Gx_1x_2x_3$, жестко связанную с телом, с началом в центре масс (тем самым исключая его горизонтальное равномерное прямолинейное смещение), для движения в потенциальном поле $U(\gamma)$ получим функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\omega, \mathbf{I}\omega) + \frac{1}{2}m(\omega, r \times \gamma)^2 - U(\gamma), \quad (1.13)$$

где \mathbf{I} — тензор инерции тела относительно центра масс, m — масса тела, ω — угловая скорость в проекциях на оси, связанные с телом, γ — вектор нормали к плоскости в тех же осях, а r — вектор из точки контакта в центр масс тела (см. рис. 2). Для поля тяжести $U(\gamma) = mg(a, \gamma)$.

Как видно из рисунка 2, вектор r для шара выражается через постоянный вектор смещения центра масс a и вектор γ по формуле

$$r = -R\gamma - a,$$

где R — радиус оболочки шара.

Уравнения движения представляются в форме уравнений Лагранжа в квазискоростях (иногда их называют уравнениями Эйлера — Пуанкаре); в данном случае они записываются в векторном виде следующим образом:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \omega} \right)' = \frac{\partial L}{\partial \omega} \times \omega + \frac{\partial L}{\partial \gamma} \times \gamma.$$

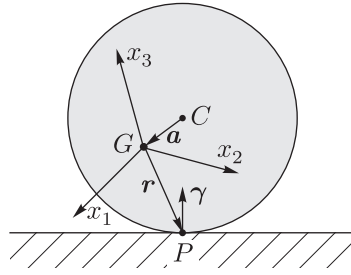


Рис. 2. Шар со смещенным центром масс на гладкой плоскости.

Подставляя сюда функцию Лагранжа (1.13), после упрощений получим замкнутую систему

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = m(\dot{\mathbf{v}}_a + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_a, \gamma)\gamma \times \mathbf{a} + mg\gamma \times \mathbf{a}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1.14)$$

где также введено обозначение $\mathbf{v}_a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$, а последнее уравнение выражает условие, что вектор нормали неподвижен в пространстве.

Полное описание поворотов шара также достигается добавлением уравнений Пуассона, описывающих эволюцию неподвижных ортов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, параллельных плоскости,

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.15)$$

3. Изоморфизм, гамильтоновость, интегрируемые случаи. Сравнивая уравнения движения двух систем, описанных выше, получим следующий результат.

Теорема 1. *Редуцированная система уравнений (1.11), (1.12), описывающая движение волчка, прикрепленного к оболочке, катящейся без проскальзывания по плоскости, эквивалентна системе уравнений (1.14), (1.15) в задаче о динамике неуравновешенного динамически несимметричного шара на абсолютно гладкой плоскости с точностью до замены параметров вида*

$$m_t = \kappa m, \quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}}{\kappa}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{I}.$$

Как следствие, отсюда получаем, что уравнения движения исходной неголономной редуцированной системы (1.11), (1.12) оказываются гамильтоновыми. Напомним, что гамильтонов формализм в избыточных координатах и квазискоростях описывается уравнениями Пуанкаре–Четаева [10]. В данном случае преобразование Лежандра в обозначениях неголономной системы имеет вид

$$\mathbf{M} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \kappa m_t(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{c} \times \boldsymbol{\gamma})\mathbf{c} \times \boldsymbol{\gamma},$$

$$H = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - L|_{\boldsymbol{\omega} \rightarrow \mathbf{M}} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) + \frac{1}{2}\kappa m_t(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{c} \times \boldsymbol{\gamma})^2 + m_t g(\mathbf{c}, \boldsymbol{\gamma}),$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{J} + \kappa m_t(\mathbf{c} \times \boldsymbol{\gamma}) \otimes (\mathbf{c} \times \boldsymbol{\gamma}))^{-1},$$

где \otimes обозначает тензорное произведение.

Вычисляя скобки Пуассона (см [10, § 2, гл. 1]), окончательно получим

Теорема 2. *Уравнения движения (1.11), (1.12) в переменных $\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}$ представляются в гамильтоновой форме*

$$\dot{M}_i = \{M_i, H\}, \quad \dot{\gamma}_i = \{\gamma_i, H\}, \quad \dot{\alpha}_i = \{\alpha_i, H\}, \quad \dot{\beta}_i = \{\beta_i, H\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.16)$$

со скобкой Ли – Пуассона следующего вида:

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{M_i, \alpha_j\} = -\varepsilon_{ijk} \alpha_k, \quad \{M_i, \beta_j\} = -\varepsilon_{ijk} \beta_k,$$

где остальные скобки равны нулю.

Результат о гамильтоновости первоначальной неголономной системы при всевозможных значениях параметров, является совершенно неочевидным, поскольку неголономные системы, связанные с качением, как правило, представляются в гамильтоновой или канонико-гамильтоновой форме лишь при специальных значениях геометрических и динамических параметров [11, 14, 24, 25].

Аналогичные вопросы в динамике общей системы материальных точек внутри катящейся по (абсолютно шероховатой) плоскости сферической оболочки исследуются в работе [3]. В ней, в частности, указывается гамильтоновость уравнений движения в случае динамически симметричного волчка.

Для интегрируемости (1.11), как и для уравнений Эйлера – Пуассона, не хватает одного дополнительного интеграла. Далее приведем частные случаи, когда он может быть найден.

Случай Эйлера. В случае $c = 0$ система уравнений (1.11) обладает дополнительным интегралом $F_2 = M^2$.

Случай Лагранжа. При $I_1 = I_2$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ есть дополнительный интеграл $F_2 = M_3$. Интегрируемость этого случая установлена в работе [12].

Частный интеграл Гесса. При $c_2 = 0$, $c_3 \sqrt{I_2^{-1} - I_1^{-1}} \mp c_1 \sqrt{I_3^{-1} - I_2^{-1}} = 0$ существует инвариантное соотношение Гесса $F_2 = \omega_1 I_1 \sqrt{I_2^{-1} - I_1^{-1}} \pm \omega_3 I_3 \sqrt{I_3^{-1} - I_2^{-1}} = 0$. Отметим, что случай Гесса был установлен благодаря найденному изоморфизму. Случай Гесса для шара со смещенным центром масс по гладкой плоскости указан в [8].

2. Однородная сферическая оболочка с неголономным шарниром внутри

1. Уравнения движения. Г. К. Сулов (см. [20]) рассмотрел систему, состоящую из двух тел, каждое из которых вращается вокруг неподвижной точки, и соединенных между собой таким образом, чтобы выполнялась (неголономная) связь

$$\omega_3 + \Omega_3 = 0,$$

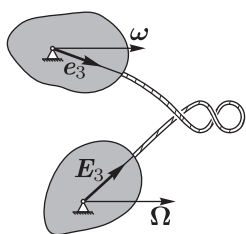


Рис. 3

где ω , Ω — векторы угловых скоростей тел, которые предполагаются заданными в подвижных системах координат, жестко связанных с каждым из тел. Он предполагал, что данную связь можно реализовать с помощью длинной гибкой нити, не поддающейся кручению. Такая реализация является некорректной, так как известно, что поворот нити на ненулевой угол может возникнуть не за счет ее скручивания, а за счет изменения формы [7, 27]. Корректная (с теоретической точки зрения) реализация связи Суллова была предложена В. Вагнером [9]. Позже аналогичная реализация, названная авторами *неголономным шарниром*, была также указана в [22].

В данной работе мы рассмотрим еще одну задачу о качении по абсолютно шероховатой плоскости сферически симметричной оболочки, внутри которой движется твердое тело,

соединенное с оболочкой при помощи острых колесиков таким образом, что исключаются относительные повороты вокруг вектора \mathbf{e} , фиксированного во внутреннем теле (рис. 4):

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{e}) = 0, \quad (2.1)$$

где $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ — угловые скорости оболочки и внутреннего тела соответственно. Для того чтобы запретить относительные повороты тел только вдоль одного направления, точки соприкосновения колесиков с внутренней поверхностью оболочки должны лежать на одной прямой, проходящей через центр сферы C (рис. 4). Возникающая связь (2.1) в точности эквивалентна связи Сулова. Кроме того будем полагать, что центры масс оболочки и тела совпадают и находятся в геометрическом центре сферы C .

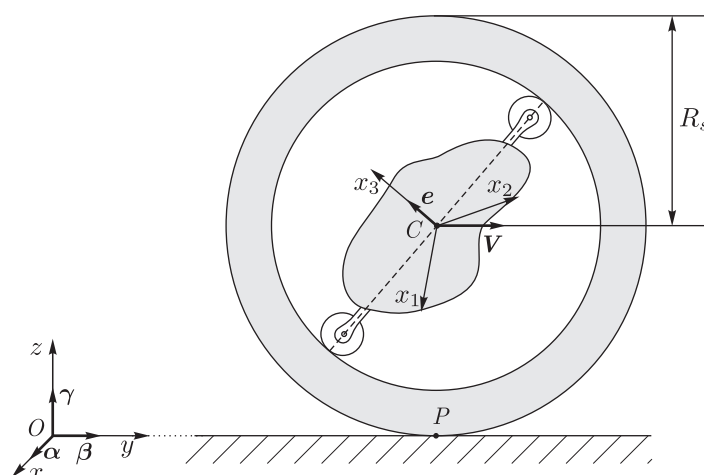


Рис. 4. Динамически симметричная сферическая оболочка с неголономным шарниром внутри на плоскости.

Выберем подвижную систему координат $Cx_1x_2x_3$, жестко связанную с внутренним телом таким образом, что ось $Cx_3 \parallel \mathbf{e}$, тогда уравнения связей примут вид

$$\begin{aligned} f_0 &= \omega_3 - \Omega_3 = 0 \quad (\text{связь Сулова}), \\ \mathbf{f} &= \mathbf{V} - \boldsymbol{\Omega} \times R\boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (\text{отсутствие проскальзывания в } P), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где \mathbf{V} — скорость центра масс системы, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор нормали к плоскости.

Как и в предыдущем разделе, будем полагать, что тензор инерции оболочки — шаровой $I_s \mathbf{E}$, и, кроме того, ограничимся в данной работе лишь случаем, когда вектор \mathbf{e} совпадает с направлением одной из главных осей инерции внутреннего тела. Кинетическая энергия всей системы представляется в форме

$$T = \frac{1}{2} (m\mathbf{V}^2 + I_s \boldsymbol{\Omega}^2 + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega})),$$

где m — масса всей системы, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции внутреннего тела (здесь мы считаем, что оси $Cx_1x_2x_3$ — главные оси инерции).

Уравнения движения в подвижной системе координат, жестко связанной с внутренним телом, можно записать, пользуясь формализмом работы [11], в явном виде получим:

$$m\dot{\mathbf{V}} + m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\lambda}, \quad I_s \dot{\boldsymbol{\Omega}} + I_s \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\lambda} \times R\boldsymbol{\gamma} - \lambda_0 \mathbf{e}, \quad \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \lambda_0 \mathbf{e}, \quad (2.3)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, λ_0 — неопределенные множители, $e = (0, 0, 1)$. Добавляя уравнения Пуассона для эволюции нормали γ и исключая неопределенные множители λ , λ_0 при помощи уравнений связей (2.2), после упрощений получим следующую замкнутую систему:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega})^\cdot &= (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\omega} - \lambda_0 e, \quad \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} + \lambda_0 e, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \boldsymbol{\omega}, \\ \tilde{\mathbf{I}} &= (I_s + mR_s^2)\mathbf{E} - mR_s^2\gamma \otimes \gamma, \quad \lambda_0 = -\frac{I_s(I_s + mR_s^2)(\omega_1\omega_2(I_1 - I_2) + I_3(\Omega_2\omega_1 - \Omega_1\omega_2))}{I_s(I_s + mR_s^2 + I_3) + mR_s^2I_3\gamma_3^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, мы видим, что для вектора углового момента системы относительно точки контакта

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \quad (2.5)$$

уравнения движения имеют форму уравнений Пуассона

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Следовательно, момент \mathbf{M} является постоянным в неподвижных осях, это аналог интеграла Чаплыгина для данной системы.

2. Первые интегралы и инвариантная мера. Система уравнений (2.4) в общем случае обладает следующими интегралами:

$$\begin{aligned} F_0 &= \gamma^2, \quad F_1 = \omega_3 - \Omega_3, \quad F_2 = \mathbf{M}^2, \quad F_3 = (\mathbf{M}, \gamma), \\ F_4 &= I_1(I_1 - I_3)\omega_1^2 + I_2(I_2 - I_3)\omega_2^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где физические постоянные интегралов F_0, F_1 фиксированы,

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 0.$$

На уровне $F_1 = 0$ (то есть на связи $f_0 = 0$) уравнения (2.4) допускают также интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}, \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}). \quad (2.7)$$

Помимо этого, система (2.4) сохраняет инвариантную меру $\mu = \rho d^3\boldsymbol{\Omega} d^3\boldsymbol{\omega} d^3\gamma$ с плотностью

$$\rho = \sqrt{I_s(I_s + mR_s^2 + I_3) + mR_s^2I_3\gamma_3^2}. \quad (2.8)$$

3. Абсолютная динамика. Для полного описания поворотов внутреннего тела поступим стандартным образом — добавим уравнения Пуассона, описывающие эволюцию неподвижных ортов α, β , параллельных плоскости:

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\beta} = \beta \times \boldsymbol{\omega}.$$

Скорость центра шара \mathbf{V} выразим из уравнения связи (2.2) и соотношения (2.5):

$$\mathbf{V} = \frac{R_s}{I_s + mR_s^2}(\mathbf{M} - \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \times \gamma.$$

Если мы выберем неподвижную систему координат таким образом, что $(\mathbf{M}, \beta) = 0$, то есть

$$\mathbf{M} = M_\alpha \alpha + M_\gamma \gamma, \quad M_\alpha, M_\gamma = \text{const},$$

то проекции скорости центра масс на неподвижные оси принимают вид

$$\frac{\dot{x}}{R_s} = -\frac{(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta})}{I_s + mR_s^2}, \quad \frac{\dot{y}}{R_s} = \frac{(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) - M_\alpha}{I_s + mR_s^2}.$$

Как мы видим, для интегрируемости редуцированной системы (2.4) по теореме Эйлера–Якоби не хватает одного дополнительного интеграла, и в общем случае при ограничении на общую поверхность уровня интегралов (2.6), (2.7) получим неинтегрируемый трехмерный поток.

Простейший интегрируемый (по теореме Эйлера–Якоби) случай $I_1 = I_2 = I_3$ рассмотрен в [22]. Отметим, что в этом случае F_4 вырождается, но взамен возникают дополнительные интегралы $\omega_1 = \text{const}$ и $\omega_2 = \text{const}$.

4. Квадрат момента относительно точки контакта равен нулю ($M^2 = 0$). Очевидно, что $M^2 = 0$ влечет за собой равенство нулю каждой компоненты вектора момента по отдельности:

$$M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай $\mathbf{M} = 0$ наиболее важен с точки зрения теории управления, поскольку на практике, как правило, управляемое движение системы начинается и заканчивается в состоянии покоя.

В данном случае удобно переписать уравнения в переменных \mathbf{M} , $\boldsymbol{\gamma}$, ω_1 , ω_2 , исключая $\boldsymbol{\Omega}$ и ω_3 , при помощи соотношения (2.5) и связи $\omega_3 - \Omega_3 = 0$:

$$\omega_3 = \frac{I_s M_3 + mR_s^2 \gamma_3 ((\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) - I_1 \gamma_1 \omega_1 - I_2 \gamma_2 \omega_2)}{\rho^2}.$$

Полагая $\mathbf{M} \equiv 0$, получим замкнутую систему уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_3 - I_2) \gamma_3 \omega_2 \chi, & I_2 \dot{\omega}_2 &= -(I_3 - I_1) \gamma_3 \omega_1 \chi, \\ \dot{\gamma}_1 &= -\gamma_3 (\omega_2 + \gamma_2 \chi), & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3 (\omega_1 + \gamma_1 \chi), & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1 \omega_1 - \gamma_2 \omega_2, \\ \chi &= \frac{mR_s^2}{\rho^2} (I_1 \gamma_1 \omega_1 + I_2 \gamma_2 \omega_2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Эта система обладает инвариантной мерой

$$\rho^{-1} d\omega_1 d\omega_2 d^3\boldsymbol{\gamma},$$

и интегралами F_0 , F_4 , E . Следовательно,

система (2.9) интегрируема по теореме Эйлера–Якоби.

5. Динамически симметричный случай ($I_1 = I_2 \neq I_3$). В рассматриваемом случае динамической симметрии система обладает дополнительным полем симметрий, и поэтому оказывается интегрируемой по теореме Эйлера–Якоби–Ли [17]. Выполняя редукцию по данному полю симметрий, получим интегрируемую по Эйлеру–Якоби систему с двумерными инвариантными многообразиями, хотя исходное трехмерное многообразие, образованное интегралами (2.6), (2.7), и в этом случае не расслаивается на семейство двумерных подмногообразий.

Поле симметрий $\hat{\mathbf{u}}$, связанное с инвариантностью системы относительно вращений оси динамической симметрии, имеет вид

$$\hat{\mathbf{u}} = \Omega_1 \frac{\partial}{\partial \Omega_2} - \Omega_2 \frac{\partial}{\partial \Omega_1} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \gamma_1}. \quad (2.10)$$

Согласно теореме Ли, чтобы с помощью такого поля понизить порядок, необходимо в качестве переменных редуцированной системы выбрать интегралы этого поля (то есть такие функции y_i , что $\hat{\mathbf{u}}(y_i) = 0$). В данном случае на уровне первых интегралов

$$\gamma^2 = 1, \quad \omega_3 - \Omega_3 = 0, \quad (\mathbf{M}, \gamma) = M_\gamma,$$

удобнее в качестве переменных взять следующие функции:

$$\gamma_3, \quad K_1 = \frac{\gamma_1 \omega_1 + \gamma_2 \omega_2}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad K_2 = \frac{\gamma_1 \omega_2 - \gamma_2 \omega_1}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad K_3 = \frac{\gamma_1 M_2 - \gamma_2 M_1}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad K_4 = \frac{M_3 - M_\gamma \gamma_3}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}.$$

Уравнения движения в новых переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_3 &= K_2 \sqrt{1 - \gamma_3^2}, \quad \dot{K}_1 = -\frac{K_2 \tilde{K}}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad \dot{K}_2 = \frac{K_1 \tilde{K}}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad \dot{K}_3 = \frac{K_1 K_4}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad \dot{K}_4 = -\frac{K_1 K_3}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \\ \tilde{K} &= \frac{\gamma_3 (I_s + m R_s^2) (I_3 \sqrt{1 - \gamma_3^2} K_5 - I_1 (I_s + I_3) K_1) + I_s I_3 (1 - \gamma_3^2) K_4}{I_1 \rho^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Уравнения (2.11) обладают интегралами

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= K_1^2 + K_2^2, \quad \tilde{F}_2 = K_3^2 + K_4^2, \\ \tilde{E} &= \frac{1}{2} (K_1^2 + K_2^2) + \frac{1}{2} \frac{(K_3 - I_1 K_2)^2}{I_s + m R_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(I_s + I_3 \gamma_3^2) (I_1 \gamma_3 K_1 + K_4)^2}{\rho^2} + \\ &+ \frac{\gamma_3}{\rho^2} \left(\frac{K_5}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}} - I_1 K_1 \right) (I_1 (I_s + m R_s^2) \gamma_3 K_1 - I_3 (1 - \gamma_3^2) K_4) + \\ &+ \frac{I_s + m R_s^2 + I_3 (1 - \gamma_3^2)}{2 \rho^2} \left(K_5^2 - \frac{2 I_1 K_1 K_5}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}} + I_1^2 (1 + \gamma_3^2) K_1^2 \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где ρ определено выше (2.8).

Интегралы редуцированной системы связаны с первоначальными интегралами (2.6), (2.7) следующим образом:

$$\tilde{F}_1 = \frac{F_4}{I_1 (I_1 - I_3)}, \quad \tilde{F}_2 = F_2 - (\mathbf{M}, \gamma)^2, \quad \tilde{E} = E.$$

Система (2.11) сохраняет также инвариантную меру вида

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{\rho} d\gamma_3 dK_1 \dots dK_4.$$

Таким образом, редуцированная система (2.11) интегрируема по теореме Эйлера – Якоби.

ЗАМЕЧАНИЕ. В сходной задаче (шар Чаплыгина с полостью, заполненной жидкостью [13]) система, получаемая в результате редукции с помощью поля симметрий, оказывается неинтегрируемой и демонстрирует хаотическое поведение.

Как известно, интегрируемые гамильтоновы системы, как правило, являются бигамильтоновыми, причем для систем с квадратичными (относительно скоростей) первыми интегралами бигамильтонового представления во многих случаях удастся указать явно [33]. Оказывается, что для редуцированной системы (2.11) справедливо обобщение данного результата.

Теорема 3. Уравнения (2.11) представляются в конформно-бигамильтоновой форме

$$\dot{x} = \rho^{-1} \mathbf{J}_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} = \rho^{-1} \mathbf{J}_2 \frac{\partial H_2}{\partial x}, \quad x = (\gamma_3, K_1, K_2, K_3, K_4),$$

$$H_1 = \frac{I_s + mR_s^2}{I_1} \tilde{E} - \frac{1}{2I_1} \tilde{F}_2, \quad H_2 = \frac{1}{2I_1} \tilde{F}_1,$$

относительно согласованных (нелинейных) пуассоновых структур $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ ранга четыре ($\text{rank } \mathbf{J}_1 = \text{rank } \mathbf{J}_2 = 4$). Ненулевые скобки, отвечающие пуассонову тензору \mathbf{J}_1 , имеют вид

$$\{K_1, K_4\}_1 = \rho \frac{K_2}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad \{K_2, K_4\}_1 = -\rho \frac{K_1}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad \{K_3, \gamma_3\}_1 = \rho \sqrt{1 - \gamma_3^2},$$

$$\{K_3, K_4\}_1 =$$

$$= \rho^{-1} \left((I_s + mR_s^2 + I_3)(mR_s^2 I_1 \sqrt{1 - \gamma_3^2} K_1 - (I_s + mR_s^2) M_\gamma) + \frac{(I_s + I_3)(I_s + mR_s^2) \gamma_3 K_4}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}} \right),$$

а для \mathbf{J}_2 , соответственно, вид:

$$\{K_1, K_3\}_2 = -\rho \frac{I_1 K_4}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad \{K_1, K_4\}_2 = \rho \frac{I_1 K_3}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad \{K_2, \gamma_3\}_2 = -\rho \sqrt{1 - \gamma_3^2},$$

$$\{K_1, K_2\}_2 = \rho^{-1} \left(\gamma_3 (I_s + mR_s^2) \left(\frac{(I_s + I_3) I_1 K_1}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}} - I_3 M_\gamma \right) - I_s I_3 \sqrt{1 - \gamma_3^2} K_4 \right).$$

Доказательство — прямая проверка уравнений и тождества Якоби.

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что согласованность пуассоновых структур $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ означает, что их линейная комбинация $\mathbf{J}_1 + \lambda \mathbf{J}_2$, $\lambda = \text{const}$, также определяет пуассонову структуру (то есть удовлетворяет тождеству Якоби).

Функцией Казимира первой скобки является \tilde{F}_1 , а для второй — \tilde{F}_2 :

$$\mathbf{J}_1 \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{J}_2 \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x} = 0.$$

Итак, в рассматриваемой системе естественным образом возник пучок пуассоновых структур $\mathbf{J}_1 + \lambda \mathbf{J}_2$, которые линейны по скоростям, но в целом нелинейны.

Для примера укажем также, как задаются канонические переменные для скобки Пуассона \mathbf{J}_1 на симплектическом листе $\tilde{F}_1 = c$:

$$K_1 = c \cos q_1, \quad K_2 = c \sin q_1, \quad \gamma_3 = \cos q_2,$$

$$K_3 = -mR_s^2 I_1 (I_s + mR_s^2 + I_3) \frac{c}{\rho^2} \sin q_1 \sin^2 q_2 - \rho p_2, \quad K_4 = \rho p_1 - \left(1 + \frac{mR_s^2}{I_s}\right) M_\gamma \cos q_2,$$

где $q_1 \in [0, 2\pi)$, $q_2 \in [0, \pi]$ — угловые переменные, p_1, p_2 — соответствующие импульсы.

3. Неголономная связка двух тел (обобщенная задача Сулова)

1. Уравнения движения. В заключение, рассмотрим задачу о свободном движении уравновешенной неголономной связки двух тел, рассмотренной в предыдущем разделе (см. рис. 4). В данном случае начало отсчета системы центра масс (который движется равномерно и прямолинейно) совпадает с геометрическим центром C оболочки. Как и выше, запишем уравнения движения в подвижной системе координат $Cx_1x_2x_3$, жестко связанной с внутренним телом, так что $Cx_3 \parallel \mathbf{e}$, а оси Cx_1 и Cx_2 направим таким образом, что одна компонента тензора инерции тела обращается в нуль: $I_{12} = 0$. Уравнение связи и тензор инерции внутреннего тела в этом случае принимают вид

$$f_0 = \omega_3 - \Omega_3 = 0,$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & I_{13} \\ 0 & I_2 & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_3 \end{pmatrix}.$$

Уравнения движения в квазискоростях с неопределенным множителем λ_0 имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \Omega} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \Omega} = \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial \Omega}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \quad (3.1)$$

где T кинетическая энергия всей системы в системе центра масс:

$$T = \frac{1}{2} I_s \Omega^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}). \quad (3.2)$$

В явном виде с учетом связи получим замкнутую относительно $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$ систему

$$I_s \dot{\boldsymbol{\Omega}} = I_s \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} - \lambda_0 \mathbf{e}, \quad \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda_0 \mathbf{e},$$

$$\lambda_0 = \frac{(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}), \mathbf{e})}{(\mathbf{I}^{-1} \mathbf{e} + I_s^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{e})}, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$.

Вектор полного углового момента относительно центра масс

$$\mathbf{M} = I_s \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (3.4)$$

сохраняет свою величину и направление в пространстве:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Таким образом, система уравнений (3.3) обладает двумя общими интегралами:

$$F_0 = \omega_3 - \Omega_3, \quad F_1 = M^2.$$

На уровне $F_0 = 0$ сохраняется также энергия T .

Всюду далее в этом разделе будем полагать

$$\Omega_3 = \omega_3.$$

Рассмотрим более подробно некоторые частные случаи этой системы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что для определения абсолютной динамики нужно еще дополнительно проинтегрировать уравнения Пуассона для направляющих косинусов:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}.$$

2. Полный момент системы равен нулю ($M = 0$). В этом случае, пользуясь уравнением (3.4) и связью $\omega_3 = \Omega_3$, исключим из уравнений движения переменные $\boldsymbol{\Omega}$, ω_3 и получим систему на плоскости:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\frac{(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)}{(I_s + I_3)^2(\det \mathbf{I} + I_s I_1 I_2)}(A_0\omega_1 + A_1\omega_2), \quad \dot{\omega}_2 = \frac{(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)}{(I_s + I_3)^2(\det \mathbf{I} + I_s I_1 I_2)}(A_2\omega_1 + A_0\omega_2), \\ A_0 &= I_{13}I_{23}(I_s(I_s + \text{Tr } \mathbf{I}) - I_{12}^2 - I_{23}^2 + (I_1 + I_2)I_3), \\ A_i &= (I_s + I_3)(I_s + I_i)(I_{i3}^2 - (I_s + I_3)I_i) - I_{i3}^2(I_{13}^2 + I_{23}^2 - (I_s + I_3)I_i). \end{aligned}$$

Эти уравнения очевидно сохраняют сингулярную инвариантную меру

$$\frac{d\omega_1 d\omega_2}{I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2}.$$

3. Вектор e направлен вдоль главной оси тензора инерции ($\mathbf{I}_{13} = 0$, $\mathbf{I}_{23} = 0$). В этом случае уравнения движения (3.3) могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \omega_3(\Omega_2 - \omega_2), \quad \dot{\Omega}_2 = -\omega_3(\Omega_1 - \omega_1), \quad \dot{\omega}_1 = -b\omega_2\omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = a\omega_1\omega_3, \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{\Omega_1\omega_2 - \Omega_2\omega_1}{1+c} - \frac{c(a-b)\omega_1\omega_2}{(1-ab)(1+c)}, \\ a &= \frac{I_3 - I_1}{I_2}, \quad b = \frac{I_3 - I_2}{I_1}, \quad c = \frac{I_3}{I_s}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При физических ограничениях на моменты инерции ($I_i + I_j \leq I_k$) справедливо неравенство $1 - ab \geq 0$, при этом равенство достигается лишь при условии $I_3 = I_1 + I_2$ (то есть внутреннее тело — плоское). При этом условии особенность в уравнении не возникает, так как величина $\frac{a-b}{1-ab} = \frac{I_1 - I_2}{I_3}$ остается ограниченной.

Уравнения (3.5) сохраняют стандартную инвариантную меру $\mu = d\Omega_1 d\Omega_2 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3$ и обладают еще одним дополнительным интегралом

$$F_2 = a\omega_1^2 + b\omega_2^2. \quad (3.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Этот интеграл совпадает с последним из интегралов (2.6) предыдущей системы, то есть его существование обусловлено спецификой связи Суслова и распределения масс тела (точнее, условием, что вектор \mathbf{e} направлен вдоль главной оси инерции).

Наличие четырех первых интегралов и инвариантной меры позволяет заключить, что

система уравнений (3.5) интегрируема в квадратурах по теореме Эйлера – Якоби, а ее интегральные инвариантные многообразия двумерны.

Для того чтобы проинтегрировать систему в квадратурах, необходимо выполнить замену времени $\omega_3 dt \rightarrow dt$ и решить получившуюся линейную систему относительно переменных $\omega_1, \omega_2, \Omega_1, \Omega_2$.

Оказывается, что уравнения (3.5) сохраняют еще один тензорный инвариант — пуассонову структуру, и поэтому могут быть представлены в гамильтоновой форме.

Предложение. Уравнения движения (3.5) представляются в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = (\Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3), \\ H &= \frac{1}{2} \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{1+c} + \frac{1}{2} \frac{c((1-a)\omega_1^2 + (1-b)\omega_2^2)}{(1-ab)(1+c)} + \frac{1}{2} \omega_3^2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

с вырожденной скобкой Ли – Пуассона ранга два ($\text{rank} \mathbf{J} = 2$)

$$\begin{aligned} \{\Omega_1, \omega_3\} &= \Omega_2 - \omega_2, & \{\Omega_2, \omega_3\} &= \omega_1 - \Omega_1, \\ \{\omega_1, \omega_3\} &= -b\omega_2, & \{\omega_2, \omega_3\} &= a\omega_1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Доказательство — прямая проверка уравнений и тождества Якоби.

На первый взгляд, тот факт, что инвариантные многообразия рассматриваемой системы двумерны, противоречит данному предложению. Действительно, симплектические листы пуассоновой структуры (3.8) двумерны и должны пересекаться с поверхностью уровня гамильтониана (3.7) по одномерным инвариантным многообразиям. Разрешение этого противоречия состоит в том, что скобка (3.8) допускает лишь две глобально определенные функции Казимира

$$C_1 = F_2, \quad C_2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + (1-ab)(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2(1-a)\Omega_1\omega_1 - 2(1-b)\Omega_2\omega_2,$$

в то время как третьей функции не существует (она определена лишь локально). Это происходит вследствие того, что двумерный симплектический лист в общем случае достаточно сложно вложен в $\mathbb{R}^5 = \{\mathbf{x}\}$ (так, если $ab > 0$ и \sqrt{ab} — иррациональное число, этот лист является произведением прямой \mathbb{R}^1 на всюду плотную обмотку двумерного тора), поэтому его пересечение с поверхностью $H = \text{const}$ оказывается в общем случае незамкнутой достаточно сложной орбитой (так, если $ab > 0$ и \sqrt{ab} — иррациональное число, а кроме того, при достаточно больших значениях $H = H_0$, получим всюду плотную обмотку двумерного тора).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $ab > 0$ Казимир скобки (3.8) может быть представлен в виде многозначной функции следующим образом:

$$C_3 = (a\omega_1^2 - b\omega_2^2) \cos(\theta) - 2\omega_1\omega_2\sqrt{ab} \sin(\theta),$$

где угловая переменная θ определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2\sqrt{ab}}\right) = \frac{(1-b)\omega_2 - (1-ab)\Omega_2}{(1-a)\omega_1 - (1-ab)\Omega_1}.$$

Скобка Ли–Пуассона (3.8) соответствует разрешимой алгебре. По классификации работы [31], это алгебра $A_{5,17}^{spq}$ при $p = q = 0$. Замена переменных, приводящая ее к каноническому виду при $a > 0$, $b > 0$, представляется в форме

$$\Omega_1 = \frac{\sqrt{a}(y_1 + y_2) + 2(1-a)y_3}{2\sqrt{a}(1-ab)}, \quad \Omega_2 = \frac{\sqrt{b}(y_2 - y_1) + 2(1-b)y_4}{2\sqrt{b}(1-ab)}, \quad \omega_1 = \frac{y_3}{\sqrt{a}}, \quad \omega_2 = \frac{y_4}{\sqrt{b}},$$

$$\{\omega_3, y_1\} = -y_2, \quad \{\omega_3, y_2\} = y_1, \quad \{\omega_3, y_3\} = \sqrt{ab}y_4, \quad \{\omega_3, y_4\} = -\sqrt{ab}y_3.$$

Обычно рассматривают обобщение задачи Суслова на полупростых алгебрах. Однако, как видим, реальные задачи приводят к системам с квадратичным гамильтонианом на разрешимой алгебре Ли.

Укажем еще два частных случая, когда система уравнений (3.5) при некоторых дополнительных ограничениях на моменты инерции внутреннего тела обладает дополнительными тензорными инвариантами.

1) $I_3 = I_1 + I_2$, то есть внутреннее тело — плоская пластинка, перпендикулярная вектору e . В этом случае $a = b = 1$ и система (3.5) обладает четырьмя квадратичными интегралами

$$C_1 = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad C_2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_1\omega_1 - \Omega_2\omega_2, \quad C_3 = \Omega_1\omega_2 + \Omega_2\omega_1 - \omega_1\omega_2,$$

$$H = \frac{1}{2}\omega_3^2 + \frac{1}{2} \frac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_s(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}{I_s + I_3},$$

где первые три интеграла являются глобально определенными функциями Казимира скобки (3.8).

Система при этом суперинтегрируема и все траектории оказываются замкнуты. Заметим также, что при любом рациональном \sqrt{ab} система (3.5) суперинтегрируема, хотя дополнительный интеграл будет существенно более сложным.

2) $I_1 = I_2 \neq I_3$, то есть внутреннее тело динамически симметрично относительно e . При этом условии $a = b$ и возникает пара коммутирующих полей симметрий,

$$\hat{u}_1 = -\Omega_2 \frac{\partial}{\partial \Omega_1} + \Omega_1 \frac{\partial}{\partial \Omega_2} - \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2},$$

$$\hat{u}_2 = \left(\Omega_1 - \frac{2I_1}{I_3}\omega_1\right) \frac{\partial}{\partial \Omega_1} + \left(\Omega_2 - \frac{2I_1}{I_3}\omega_2\right) \frac{\partial}{\partial \Omega_2} - \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2},$$

$$[\hat{u}_1, \hat{u}_2] = 0,$$

а интегралы представляются после несложных упрощений в виде

$$\tilde{F}_1 = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \tilde{F}_2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \frac{2I_1}{I_3}(\Omega_1\omega_1 + \Omega_2\omega_2), \quad \tilde{H} = \frac{1}{2} \frac{I_s}{I_s + I_3}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{1}{2}\omega_3^2. \quad (3.9)$$

Если существование поля $\hat{\mathbf{u}}_1$ очевидно и связано с инвариантностью относительно вращений вокруг оси динамической симметрии, то возникновение поля $\hat{\mathbf{u}}_2$ достаточно неочевидно.

Боле того, в отличие от $\hat{\mathbf{u}}_1$, поле симметрий $\hat{\mathbf{u}}_2$ не сохраняет первые интегралы (3.9) (то есть $\hat{\mathbf{u}}_2(\tilde{F}_i) \neq 0$, $\hat{\mathbf{u}}_2(\tilde{H}) \neq 0$). Это позволяет использовать его для гамильтонизации системы при помощи пуассоновой структуры ранга два следующим образом:

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_F \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{J}_F = \frac{1}{\hat{\mathbf{u}}_2(F)} \mathbf{v} \wedge \hat{\mathbf{u}}_2,$$

где в качестве функции F может быть выбран любой из интегралов (3.9), а \mathbf{v} — исходное векторное поле системы (3.5). В компонентах тензор \mathbf{J}_F представляется как $\mathbf{J}_F = \left\| \frac{v^i u_2^j - v^j u_2^i}{\sum_k u_2^k \frac{\partial F}{\partial x_k}} \right\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Система (3.5) — следствие однородности инвариантна относительно растяжений $\omega_i \rightarrow \lambda \omega_i$, $\Omega_i \rightarrow \lambda \Omega_i$ с одновременной заменой времени $\lambda dt \rightarrow dt$. Им соответствует векторное поле

$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \Omega_1 \frac{\partial}{\partial \Omega_1} + \Omega_2 \frac{\partial}{\partial \Omega_2} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \omega_3 \frac{\partial}{\partial \omega_3}.$$

Оно коммутирует с полями $\hat{\mathbf{u}}_1$, $\hat{\mathbf{u}}_2$, а с исходным полем $\hat{\mathbf{v}}$ его коммутатор равен

$$[\hat{\mathbf{u}}_3, \mathbf{v}] = \mathbf{v}.$$

Список литературы

- [1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.
- [2] Бизяев И. А., Цыганов А. В. О сфере Рауса // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 569–583. (См. также: Bizyaev I. A., Tsiganov A. V. On the Routh sphere problem // J. Phys. A, 2013, vol. 46, no. 8, pp. 1–11.)
- [3] Болотин С. В., Попова Т. В. Об уравнениях движения системы внутри катящегося шара // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 51–58. (См. также: Bolotin S. V., Popova T. V. On the motion of a mechanical system inside a rolling ball // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 159–165.)
- [4] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтонизация неголономных систем в окрестности инвариантных многообразий // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 829–854. (См. также: Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonisation of non-holonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 116, no. 5, pp. 443–464.)
- [5] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307. (См. также: Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.)
- [6] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов: 2 // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 59–76. (См. также: Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors: 2 // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158.)
- [7] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Гамильтоновость и интегрируемость задачи Суслова // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 1, с. 127–142. (См. также: Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 104–116.)

- [8] Буров А. А. О частных интегралах уравнений движения твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения: Сб. ст. / В. В. Румянцев. Москва: ВЦ АН СССР, 1985. С. 118–121.
- [9] Вагнер В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1941, вып. 5, с. 302–327.
- [10] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [11] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280. (См. также: Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.)
- [12] Борисов А. В., Мамаев И. С. Две неголономные интегрируемые связки твердых тел // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 559–568. (См. также: Borisov A. V., Mamaev I. S. Two nonholonomic integrable problems tracing back to Chaplygin // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 2, pp. 191–198.)
- [13] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика шара Чаплыгина с полостью, заполненной жидкостью // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 103–111. (См. также: Borisov A. V., Mamaev I. S. The dynamics of the Chaplygin ball with a fluid-filled cavity // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 5, pp. 490–496.)
- [14] Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202. (См. также: Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277–328.)
- [15] Борисов А. В., Мамаев И. С., Трещёв Д. В. Качение твердого тела без проскальзывания и верчения: Кинематика и динамика // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 4, с. 783–797. (См. также: Borisov A. V., Mamaev I. S., Treschev D. V. Rolling of a rigid body without slipping and spinning: Kinematics and dynamics // J. Appl. Nonlinear Dyn., 2013, vol. 2, no. 2, pp. 161–173.)
- [16] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–107.
- [17] Козлов В. В. Теорема Эйлера–Якоби–Ли об интегрируемости // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 229–245. (См. также: Kozlov V. V. The Euler–Jacobi–Lie integrability theorem // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 4, pp. 329–343.)
- [18] Козлов В. В. Замечания об интегрируемых системах // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 3, с. 459–478.
- [19] Пивоварова Е. Н., Иванова Т. Б. Исследование устойчивости периодических решений в задаче о качении шара с маятником // Вестн. УдГУ. Матем. Механ. Комп. науки, 2012, № 4, с. 146–155.
- [20] Суслев Г. К. Теоретическая механика. Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1946. 655 с.
- [21] Фёдоров Ю. Н. О двух интегрируемых неголономных системах в классической динамике // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1989, № 4, с. 38–41.
- [22] Харламов А. П., Харламов М. П. Неголономный шарнир // НАН Украины, Механика твердого тела, 1995, № 27, с. 1–7.
- [23] Чаплыгин С. А. О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров // Собр. соч.: Т. 1 / С. А. Чаплыгин. Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1948. С. 26–56.
- [24] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling of a rigid body on a plane and sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200. (См. также: Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение твердого тела по плоскости и сфере: Иерархия динамики // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 173–205.)

- [25] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 200–219. (См. также: Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение шара по поверхности: Новые интегралы и иерархия динамики // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 206–226.)
- [26] Fedorov Yu. N., Maciejewski A. J., Przybylska M. The Poisson equations in the nonholonomic Suslov problem: Integrability, meromorphic and hypergeometric solutions // Nonlinearity, 2009, vol. 22, pp. 2231–2259.
- [27] Fuller F. B. The writhing number of a space curve // Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1971, vol. 68, no. 4, pp. 815–819.
- [28] Halme A., Schonberg T., Wang Y. Motion control of a spherical mobile robot // Proc. of the 4th Internat. Workshop on Advanced Motion Control, 1996: Vol. 1, pp. 259–264.
- [29] Hojman S. A. The construction of a Poisson structure out of a symmetry and a conservation law of a dynamical system // J. Phys. A, 1996, vol. 29, pp. 667–674.
- [30] Kim B. Routh symmetry in the Chaplygin's rolling ball // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 6, pp. 663–670.
- [31] Patera J., Sharp R. T., Winternitz P. Invariants of real low dimension Lie algebras // J. Math. Phys., 1976, vol. 17, no. 6, pp. 986–994.
- [32] Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. On the dynamic model and motion planning for a class of spherical rolling robots // IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation, 2012, pp. 3226–3231.
- [33] Tsiganov A. V. On natural Poisson bivectors on the sphere // J. Phys. A, 2011, vol. 44, 105203, 15 pp.

The dynamics of nonholonomic systems consisting of a spherical shell with a moving rigid body inside

Ivan A. Bizyaev¹, Alexey V. Borisov², Ivan S. Mamaev³

^{1,2,3}Institute of Computer Science;

Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles

Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

^{2,3}A. A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS

Bardina str. 4, Moscow, 117334, Russia

^{2,3}Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS

S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia

¹bizaev_90@mail.ru, ²borisov@rcd.ru, ³mamaev@rcd.ru

In this paper we investigate two systems consisting of a spherical shell rolling on a plane without slipping and a moving rigid body fixed inside the shell by means of two different mechanisms. In the former case the rigid body is fixed at the center of the ball on a spherical hinge. We show an isomorphism between the equations of motion for the inner body with those for the ball moving on a smooth plane. In the latter case the rigid body is fixed by means of the nonholonomic hinge. The equations of motion for this system have been obtained and new integrable cases found. A special feature of the set of tensor invariants of this system is that it leads to the Euler–Jacobi–Lie theorem, which is a new integration mechanism in nonholonomic mechanics.

MSC 2010: 70E18, 37J60, 37J35

Keywords: nonholonomic constraint, tensor invariants, isomorphism, nonholonomic hinge

Received September 4, 2013, accepted October 31, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 547–566 (Russian)

